



Lesnická
a dřevařská
fakulta

CAD/CAE

ÚNOD: Jan Tippner, Václav Sebera,
Miroslav Trcala, Eva Troppová.

Fyzikální model

(fyzikální podstata problémů,
počáteční a okrajové podmínky,
materiálové modely)

Mendelova
univerzita
v Brně



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na discipliny společného základu (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.



Lesnická
a dřevařská
fakulta

NUMERICKÁ OPTIMALIZACE DŘEVAŘSKÉHO VÝROBKU

Jan Tippner, LDF MENDELU

Fyzikální model

(fyzikální podstata problémů,
počáteční a okrajové podmínky,
materiálové modely)

Mendelova
univerzita
v Brně



- Fyzikální model reality
- Okrajové podmínky
- Počáteční podmínky
- Materiálové modely
 - lineární
 - nelineární
- Materiálové vlastnosti

- Neboli “fyzika úlohy”
- Preprocessing: geometrie, numerický výpočtivý model (fyzikální model na síti)
- Využívá k popisu děje zavedených fyzikálních zákonů – modelů, tedy zjednodušení – fyzikální model je opět abstrakcí reality, vždy zjednodušuje, jinak by nebyl modelem (nikdy není věrnou kopií skutečnosti)
- Ampérův, Archimédův, Coulombův, Darcyho, 1., 2., 3. termodynamický, 1. a 2. Fourierův zákon, Gaussův z. elektrostatiky, Gay-Lussacův, Henryho, Hookeův, Keplerovy, Kirchhoffovy, Lenzův, Malusův, Planckův vyzařovací z., 1 a 2. Fickův, Stefanův-Boltzmannův...
- Fyz. problém je obvykle **popsán rovnicí** či soustavou. Např. PDE
- Popis chování rovnice (modelu) docílíme jejím **řešením**. Řešení složitějších modelů umožnily sofistikované numerické metody (MKP...), zefektivnění užití těchto metod přinesly počítače.
- Je určen okrajovými a počátečními podmínkami, materiálovými vlastnostmi a vlastnostmi elementu (tvarová funkce apod.)

Snaha popsat fyz. problém v modelovaném systému (definice klíčových vlastností systému, které nás zajímají) – pro potřeby CAE nejčastěji:

Sdílení tepla (Fourierovy zákony, radiace, konvekce, kondukce) – Heat Flow

Difúze (Fickovy zákony, Darcyho zákony) – Diffusion

Mechanika tekutin (CFD – Navier Stokes) – Fluid Mechanics

Elektromagnetismus (LF, HF - Maxwell) – Electromagnetics

Napjatostně-deformační analýzy (Hooke) – Structural Analyzes, Stress Analyzes

Akustika – Acoustics (vlnová rovnice), Hooke

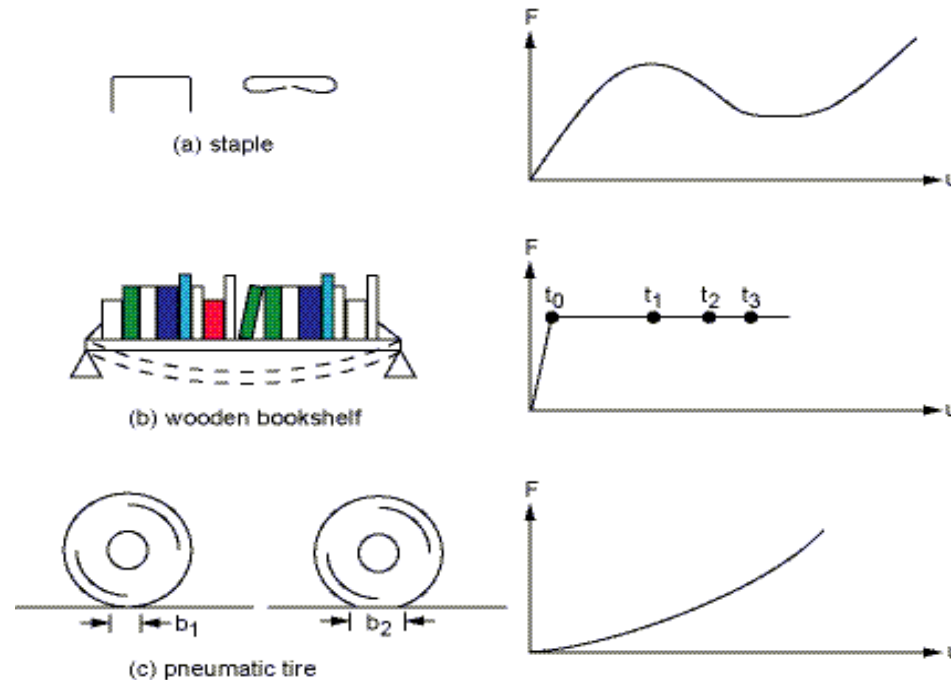
Multifyzikální problémy – Multiphysics, Coupled Field Analysis

“Fyzika úlohy” je dána okrajovými a počátečními podmínkami, fyzikálním zákonem, materiálovými vlastnostmi a vlastnostmi elementu (tvarová funkce apod.)

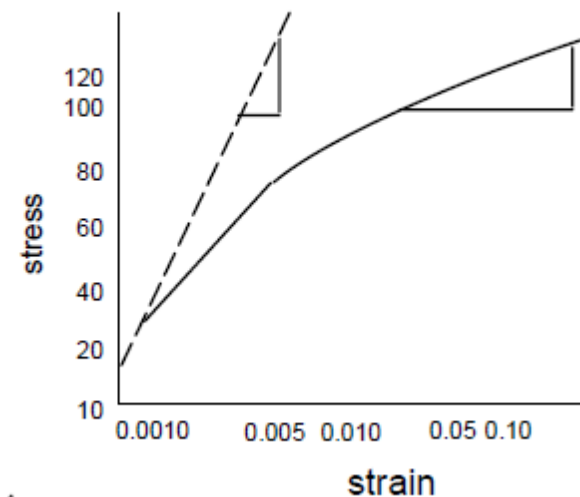
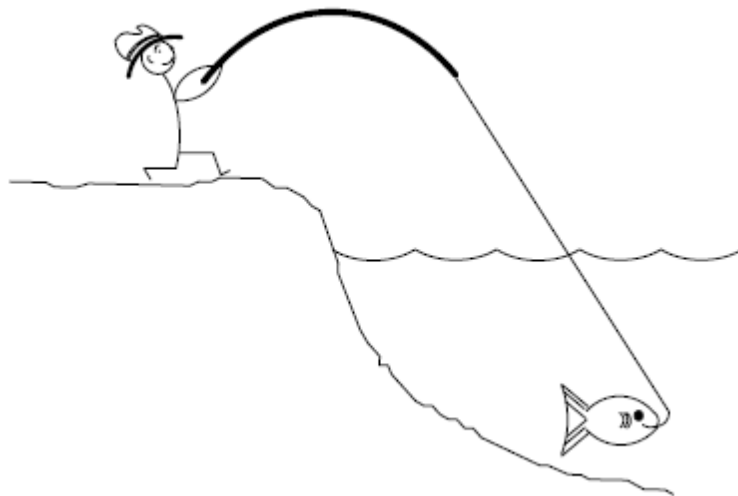
- **Okrajové podmínky** jsou takové podmínky, které musí funkce (popř. její derivace) splňovat v určitých bodech. Tyto body obvykle leží na okraji oblasti, na níž diferenciální rovnici řešíme. Řešení rovnic s okrajovými podmínkami označujeme jako okrajové úlohy (problémy), popř. úlohy (problémy) s okrajovými podmínkami.
- **Počátečními podmínkami** určujeme, jak má vypadat funkce, popř. její derivace v určitém časovém okamžiku na celé oblasti, na níž diferenciální rovnici řešíme. Řešení rovnic s počátečními podmínkami označujeme jako Cauchyovy úlohy (problémy) nebo úlohy (problémy) s počátečními podmínkami

- S volbou prvku v rámci ANSYS probíhá volba fyzikálního modelu
-- **et,1,TYPE** mimo dimenzionalitu vazba na řešenou fyziku
- Následujícím krokem je “naplnění” fyzikálního modelu parametry
mp – material models
- Volba typu analýzy (teplo vs. mechanika, statika vs. dynamika), volba materiálového modelu
-- (isotropní, ortotropní, anisotropní, lineární, nelineární – který?)
- Důležité je vědět co chci počítat → bude moje analýza vykazovat lineární nebo nelineární chování? Bude lineární model dostačující pro nalezení toho, co požadují?
- Pokud lineární analýza stačit nebude, musíme použít **nelineární analýzu**

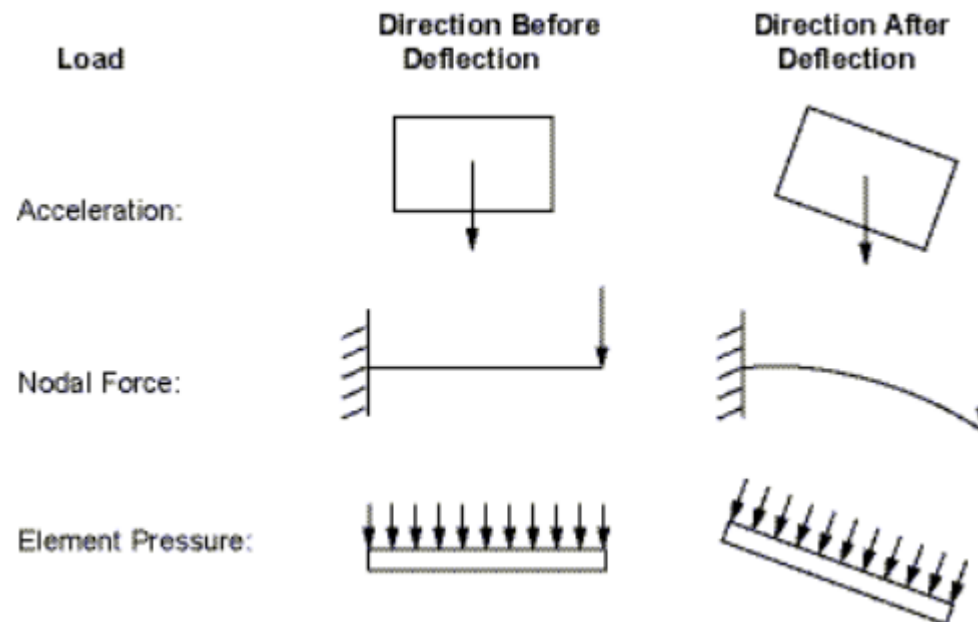
- **Nelineární chování je** změna “**tuhosti struktury během řešení**”. Důvody pro tuto změnu nám rozdělují nelinearity do tří základních kategorií
 - Geometrické nelinearity
 - Materiálové nelinearity
 - Nelinearity z důvodu změny statusu



- V rámci geometrických nelinearit uvažujeme tyto tři jevy:
 - **Velké průhyby/rotace** – posunutí části struktury jsou velké ve srovnání s nejmenším rozměrem struktury (rybářský prut)
 - **Stress stiffening** – tuhost se výrazně mění s průhybem/ramenem momentu = napětí v jednom směru ovlivňuje tuhost v jiném (předejpaté kabely a membrány)



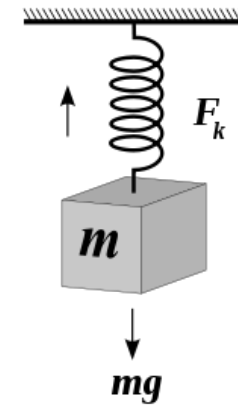
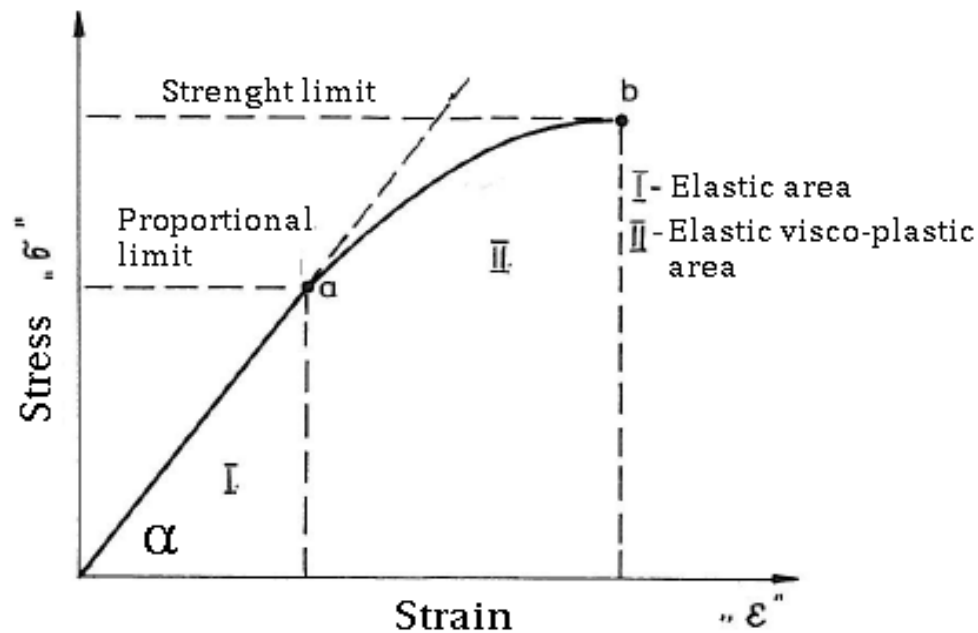
- Při velkých rotacích/průhybech se nám neaktualizují okrajové podmínky během řešení → změna tvaru není reflektována z hlediska zatížení



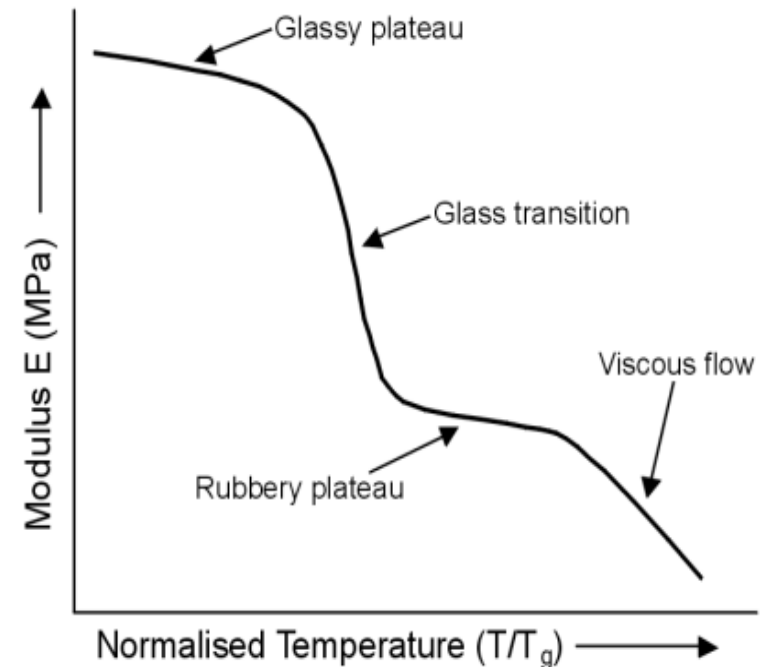
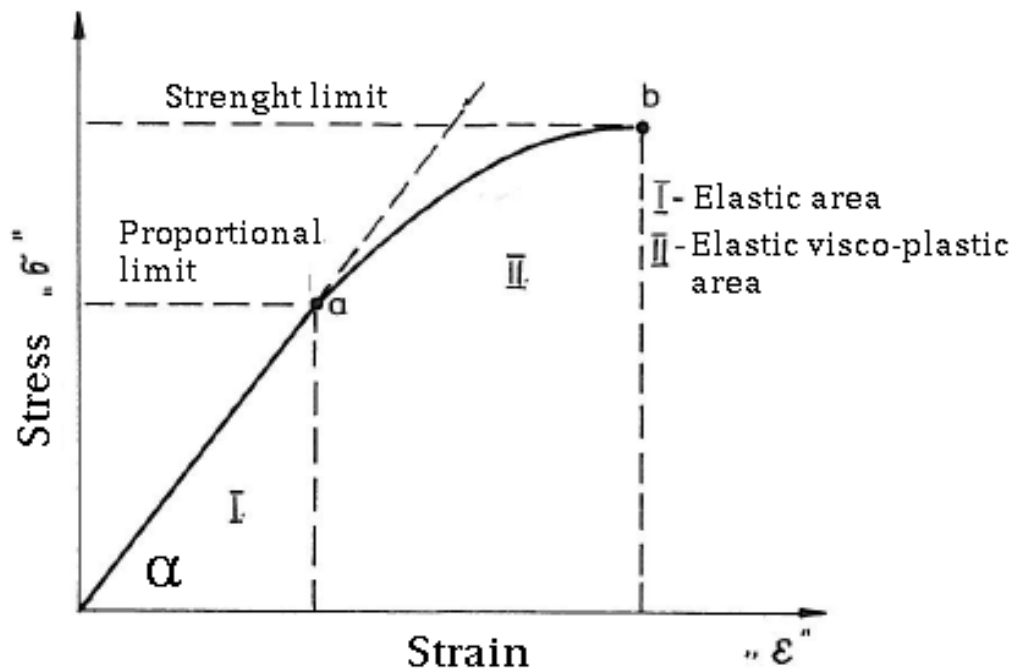
- **Materiálový model** představuje model, podle kterého se materiál bude chovat na dané zatížení (mechanické síly, teplota, el. proud apod.)
- Lineární model představuje **Hookeův zákon (oblast I) - pružina**

$$E = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta \sigma}{\Delta \varepsilon}$$

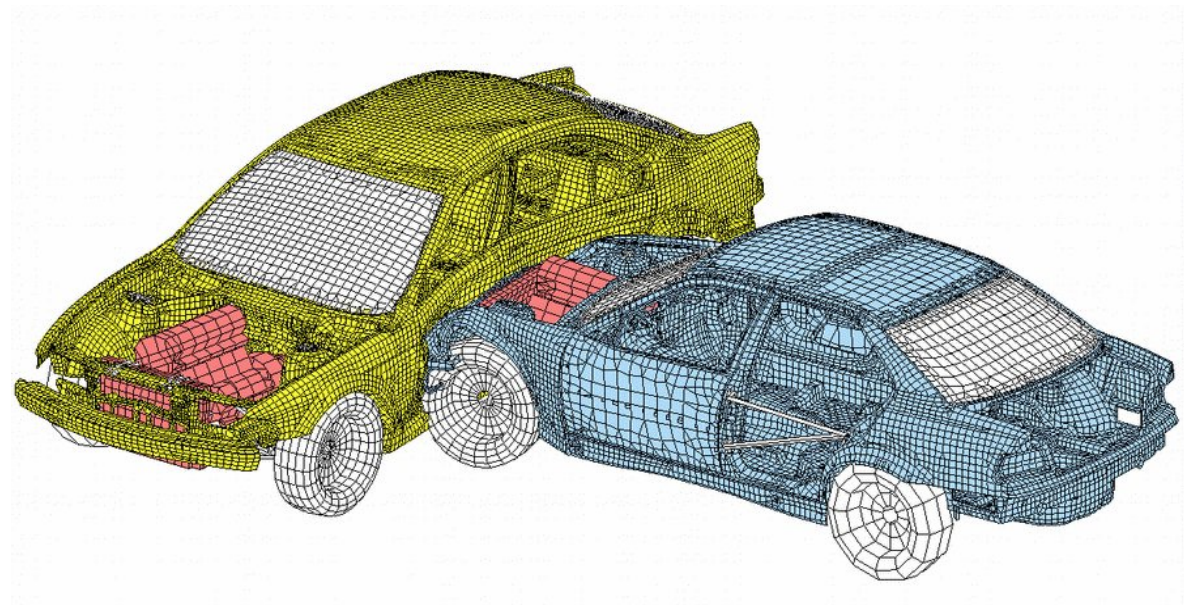
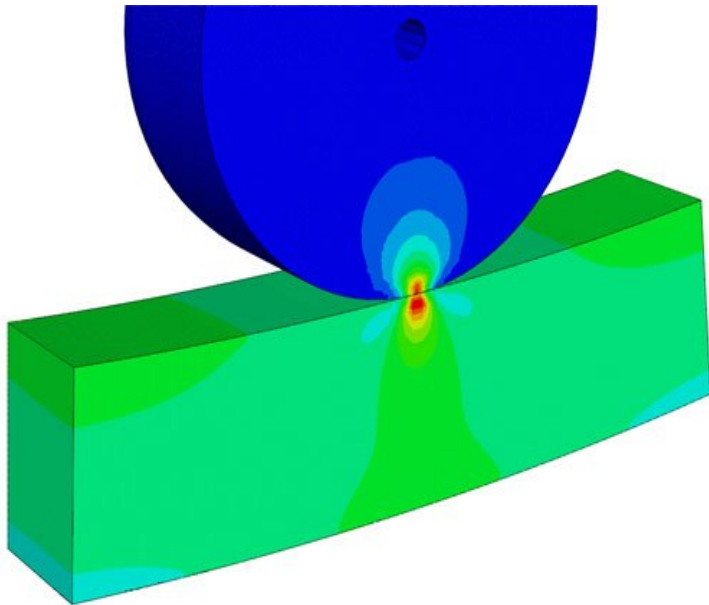
$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta F}{\Delta u}$$



- **Materiálová nonlinearity** je vyjádřena nelineárním vztahem mezi napětím a poměrnou deformací
 - Plastická oblast (trvalá deformace)
 - Změnou teploty se mění materiálové vlastnosti (plasty)
 - Vlivem zatížení se mění tuhost materiálu (dlouhodobé zatížení Creep)



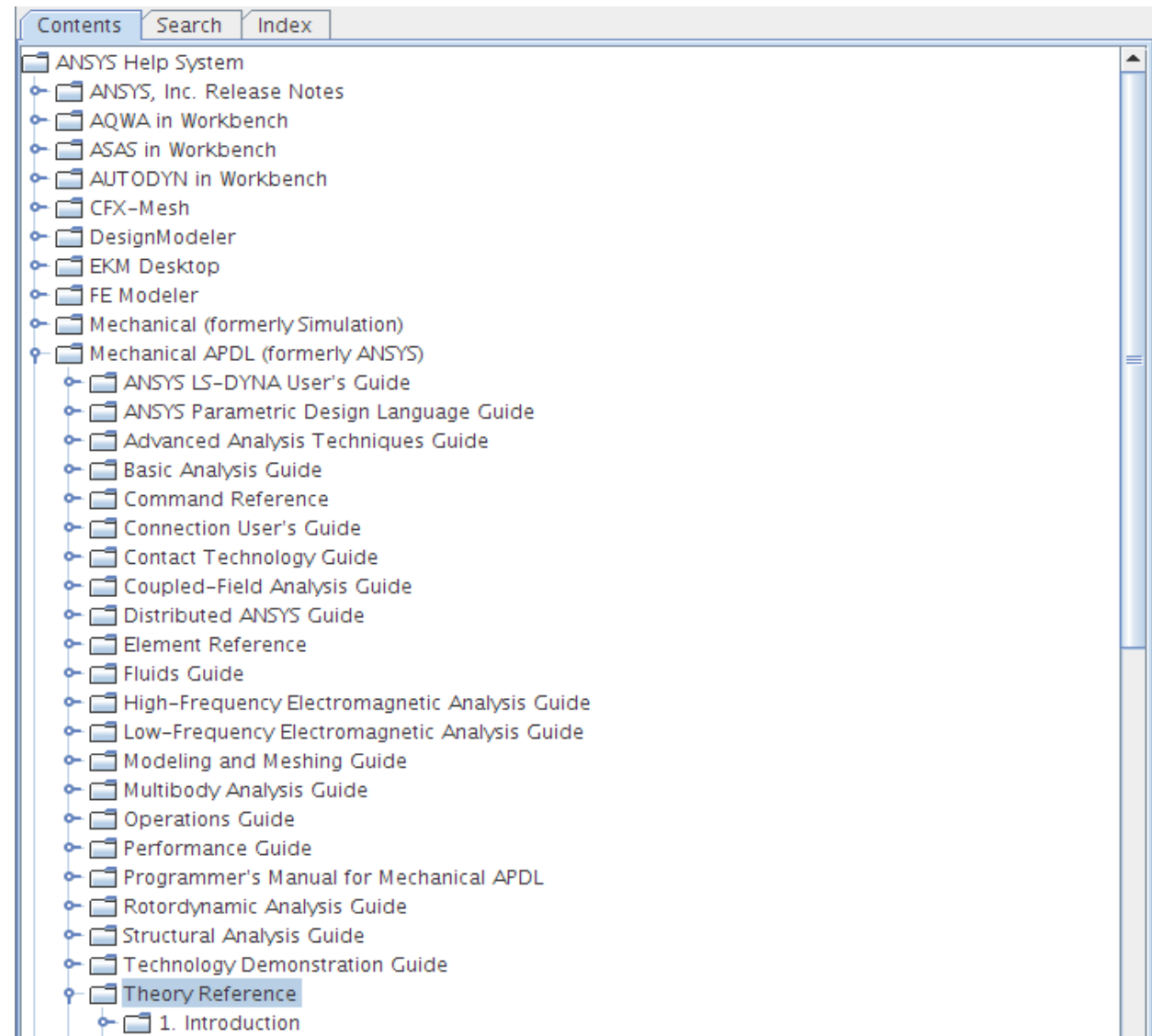
- Mnoho struktur vykazuje různé chování při svém různém “**statusu**”, např. Tažné lano je buď **napnuté** nebo **uvolněné** (např. v klubíčku), dvě tělesa **jsou** nebo **nejsou** v kontaktu, puda je buď **zmrzlá** nebo **rozmrzlá** apod.
- Kontakt je častá, speciální a velmi složitá nelinearita
- Při kontaktu dochází ke vzájemným interakcím vedoucím ke změnám tuhosti obou těles a k jejich penetraci → v každém kroku řešení je nutné elementy, které jsou v kontaktu, upravit z hlediska jejich tuhosti



- V analýzách je častá i kombinace všech druhů nelinearit, např. pryžová manžeta v automobilu
 - Velká deformace
 - Materiál je guma (hyperelasticita)
 - Vzájemný kontakt částí
- 1) Je obtížnější dosáhnout konvergence (nalezení řešení)
 - 2) Dlouhý výpočet vs. přesnost
 - 3) Obtížná verifikace (experiment nebo analytické řešení)



ANSYS 14.5 – HELP – Theory reference



2.1. Structural Fundamentals

The following topics concerning structural fundamentals are available:

- [Stress-Strain Relationships](#)
- [Orthotropic Material Transformation for Axisymmetric Models](#)
- [Temperature-Dependent Coefficient of Thermal Expansion](#)

2.1.1. Stress-Strain Relationships

This section discusses material relationships for linear materials. Nonlinear materials are discussed in [Structures with Material Nonlinearities](#). The stress is related to the strains by:

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon^{el}\} \quad (2-1)$$

where:

$$\{\sigma\} = \text{stress vector} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \sigma_{xy} & \sigma_{yz} & \sigma_{xz} \end{bmatrix}^T \quad (\text{output as } S)$$

[D] = elasticity or elastic stiffness matrix or stress-strain matrix (defined in [Equation 2-14](#) through [Equation 2-19](#)) or inverse defined in [Equation 2-4](#) or, for a few anisotropic elements, defined by full matrix definition (input with [TB,ANEL](#))

$$\{\epsilon^{el}\} = \{\epsilon\} - \{\epsilon^{th}\} = \text{elastic strain vector (output as EPEL)}$$

$$\{\epsilon\} = \text{total strain vector} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_y & \epsilon_z & \epsilon_{xy} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{xz} \end{bmatrix}^T$$

$$\{\epsilon^{th}\} = \text{thermal strain vector (defined in [Equation 2-3](#)) (output as EPTH)}$$

Note: $\{\epsilon^{el}\}$ (output as EPEL) are the strains that cause stresses.

The shear strains (ϵ_{xy} , ϵ_{yz} , and ϵ_{xz}) are the engineering shear strains, which are twice the tensor shear strains. The ϵ notation is commonly used for tensor shear strains, but is used here as engineering shear strains for simplicity of output.

A related quantity used in POST1 labeled "component total strain" (output as EPTO) is described in [Structures with Material Nonlinearities](#).

Poměrnou deformaci $\{\varepsilon\}$ lze rozložit na složku deformace tepelné $\{\varepsilon_t\}$, počáteční $\{\varepsilon_0\}$ a pružné $\{\varepsilon_{el}\}$:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{el}\} + \{\varepsilon_t\} + \{\varepsilon_0\}$$

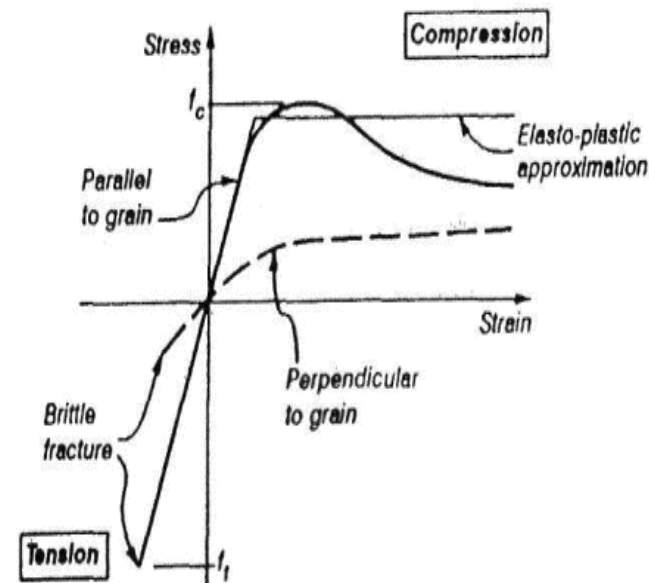
Vztah deformace a napětí pro lineární elasticitu materiálu zahrnující vnitřní (počáteční) napětí a napětí způsobená teplotní roztažností je dán vztahem:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon_{el}\} + \{\sigma_0\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_t\} - \{\varepsilon_0\})$$

Matice tuhosti $[D]$, resp. inverzní matice poddajnosti $[D]^{-1}$ jsou definovány odlišně pro isotropní, ortotropní a anizotropní materiály. Pro isotropní materiály je matice $[D]^{-1}$ definována:

$$[D]^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix}$$

$$[D]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & \frac{-\mu_{xy}}{E_x} & \frac{\mu_{xz}}{E_x} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\mu_{yx}}{E_y} & \frac{1}{E_y} & \frac{-\mu_{yz}}{E_y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\mu_{zx}}{E_z} & \frac{-\mu_{zy}}{E_z} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} \end{bmatrix}$$



SMRK

BUK

NURT 0.47 [-]
 LT 0.013 -/-
 RL 0.028 -/-

0.49
 0.044
 0.073

E R 690 MPa
 L 15900 -/-
 T 390 -/-

2240
 13700
 1140

G RT 36 MPa
 LT 770 -/-
 RL 750 -/-

46
 1060
 1610

$$R = X ; L = Y ; T = Z$$

$$1000 \text{ MPa} \rightarrow 1000 \times 10^6 \text{ [Pa]}$$

DENSITY:

490 kg/m³

705 kg/m³