Lesnická a dřevařská fakulta

CAD/CAE

ÚNOD: Jan Tippner, Václav Sebera, Miroslav Trcala, Eva Troppová.

Fyzikální model

(fyzikální podstata problémů, počáteční a okrajové podmínky, materiálové modely)

Mendelova univerzita v Brně

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na discipliny společného základu (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

- Fyzikální model reality
- Okrajové podmínky
- Počáteční podmínky
- Materiálové modely
  - lineární
  - nelineární
- Materiálové vlastnosti

Fyzikální model

- Neboli “fyzika úlohy”
- Preprocessing: geometrie, numerický výpočtivý model (fyzikální model na síti)
- Využívá k popisu děje zavedených fyzikálních zákonů – modelů, tedy zjednodušení – fyzikální model je opět abstrakcí reality, vždy zjednodušuje, jinak by nebyl modelem (nikdy není věrnou kopií skutečnosti)
- Ampérův, Archimédův, Coulombův, Darcyho, 1., 2., 3. termodynamický, 1. a 2. Fourierův zákon, Gaussův z. elektrostatiky, Gay-Lussacův, Henryho, Hookeův, Keplerovy, Kirchhoffovy, Lenzův, Malusův, Planckův vyzařovací z., 1 a 2. Fickův, Stefanův-Boltzmannův...
- Fyz. problém je obvykle **popsán rovnicí** či soustavou. Např. PDE
- Popis chování rovnice (modelu) docílíme jejím **řešením**. Řešení složitějších modelů umožnily sofistikované numerické metody (MKP...), zefektivnění užití těchto metod přinesly počítače.
- Je určen okrajovými a počátečními podmínkami, materiálovými vlastnostmi a vlastnostmi elementu (tvarová funkce apod.)

Snaha popsat fyz. problém v modelovaném systému (definice klíčových vlastností systému, které nás zajímají) – pro potřeby CAE nejčastěji:

Sdílení tepla (Fourierovy zákony, radiace, konvekce, kondukce) – Heat Flow

Difúze (Fickovy zákony, Darcyho zákony) – Diffusion

Mechanika tekutin (CFD – Navier Stokes) – Fluid Mechanics

Elektromagnetismus (LF, HF - Maxwell) – Electromagnetics

Napjatostně-deformační analýzy (Hooke) – Structural Analyzes, Stress Analyzes

Akustika – Acoustics (vlnová rovnice), Hooke

Multifyzikální problémy – Multiphysics, Coupled Field Analysis

“Fyzika úlohy” je dána okrajovými a počátečními podmínkami, fyzikálním zákonem, materiálovými vlastnostmi a vlastnostmi elementu (tvarová funkce apod.)

- **Okrajové podmínky** jsou takové podmínky, které musí funkce (popř. její derivace) splňovat v určitých bodech. Tyto body obvykle leží na okraji oblasti, na níž diferenciální rovnici řešíme. Řešení rovnic s okrajovými podmínkami označujeme jako okrajové úlohy (problémy), popř. úlohy (problémy) s okrajovými podmínkami.
- **Počátečními podmínkami** určujeme, jak má vypadat funkce, popř. její derivace v určitém časovém okamžiku na celé oblasti, na níž diferenciální rovnici řešíme. Řešení rovnic s počátečními podmínkami označujeme jako Cauchyovy úlohy (problémy) nebo úlohy (problémy) s počátečními podmínkami

- S volbou prvku v rámci ANSYS probíhá volba fyzikálního modelu

  -- ***et,1,TYPE*** …. mimo dimenzionality vazba na řešenou fyziku

- Následujícím krokem je “naplnění“ fyzikálního modelu parametry

  mp – material models

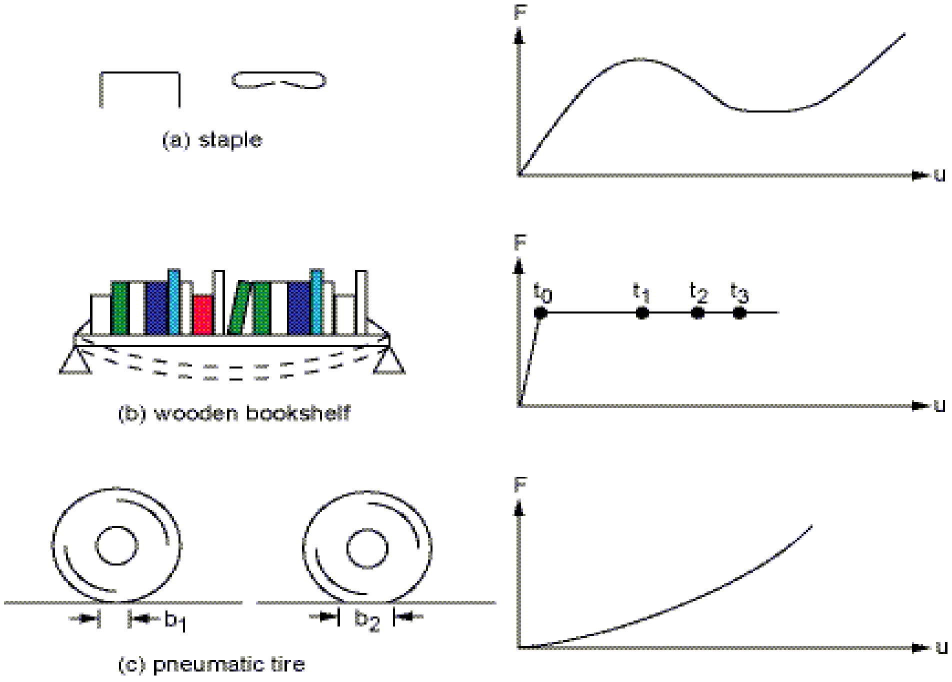
- Volba typu analýzy (teplo vs. mechanika, statika vs. dynamika), volba materiálového modelu

  -- (isotropní, otrotropní, anisotropní, lineární, nelineární – který?)

- Důležité je vědět co chci počítat → bude moje analýza vykazovat lineární nebo nelineární chování? Bude lineární model dostačující pro nalezení toho, co požaduji?

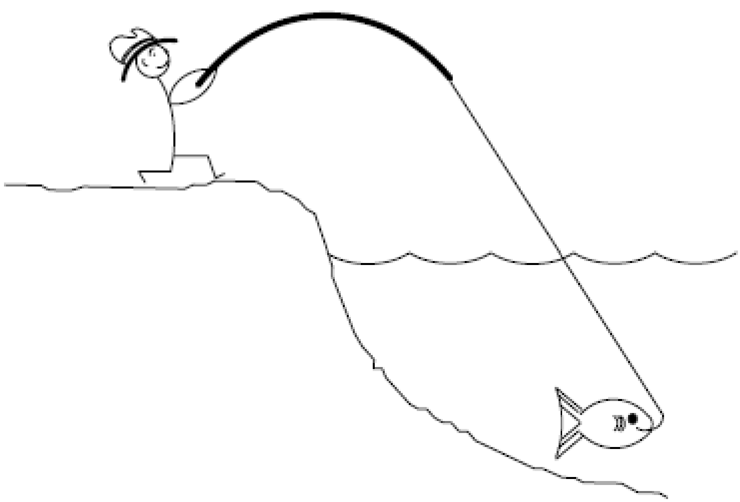
- Pokud lineární analýza stačit nebude, musíme použít **nelineární analýzu**

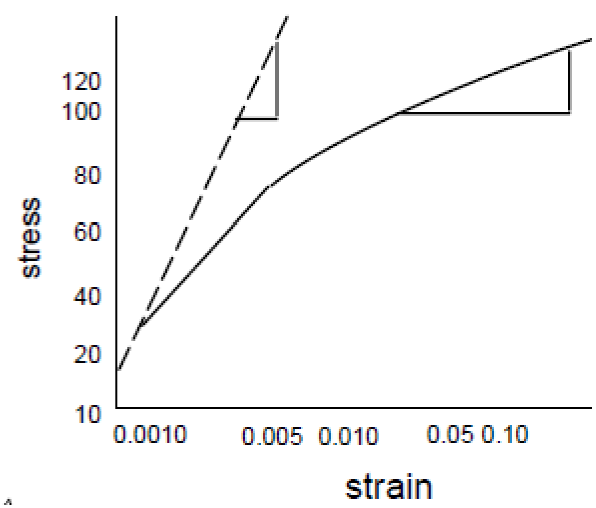
- **Nelineární chování je** změna “**tuhosti struktury během řešení”.** Důvody pro tuto změnu nám rozdělují nelinearity do tří základních kategorií
  - Geometrické nelinearity
  - Materiálové nelinearity
  - Nelinearity z důvodu změny statusu



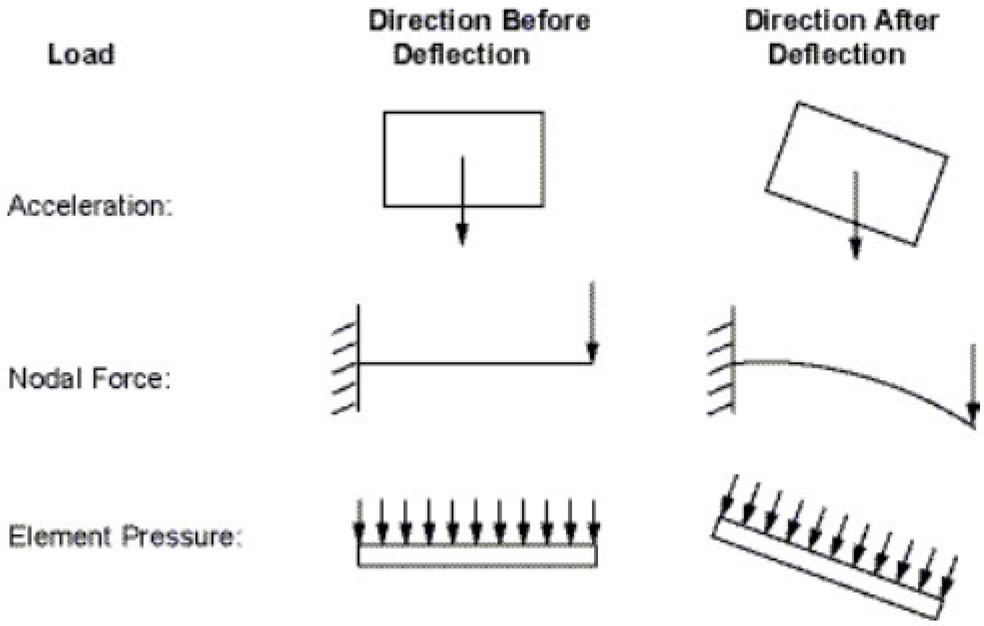
Fyzikální model – geometrické nelinearity

- V rámci geometrických nelinearit uvažujeme tyto tři jevy:
  - **Velké průhyby/rotace** – posunutí části struktury jsou velké ve srovnání s nejmenším rozměrem struktury (rybářský prut)
  - **Stress stiffening –** tuhost se výrazně mění s průhybem/ramenem momentu = napětí v jednom směru ovlivňuje tuhost v jiném (předepjaté kabely a membrány)





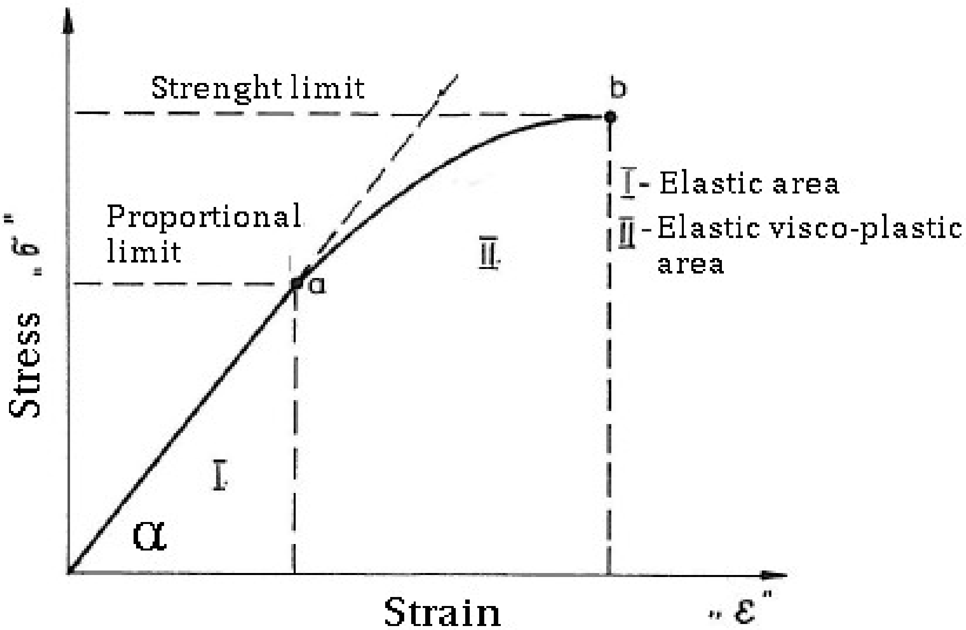
- Při velkých rotacích/průhybech se nám neaktualizují okrajové podmínky během řešení → změna tvaru není reflektována z hlediska zatížení

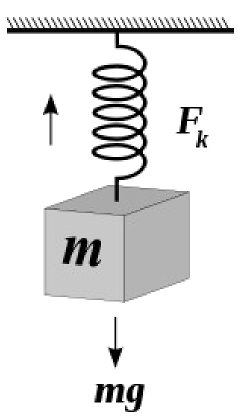


- **Materiálový model** představuje model, podle kterého se materiál bude chovat na dané zatížení (mechanické síly, teplota, el. proud apod.)
- Lineární model představuje **Hookeův zákon (oblast I)** - **pružina**

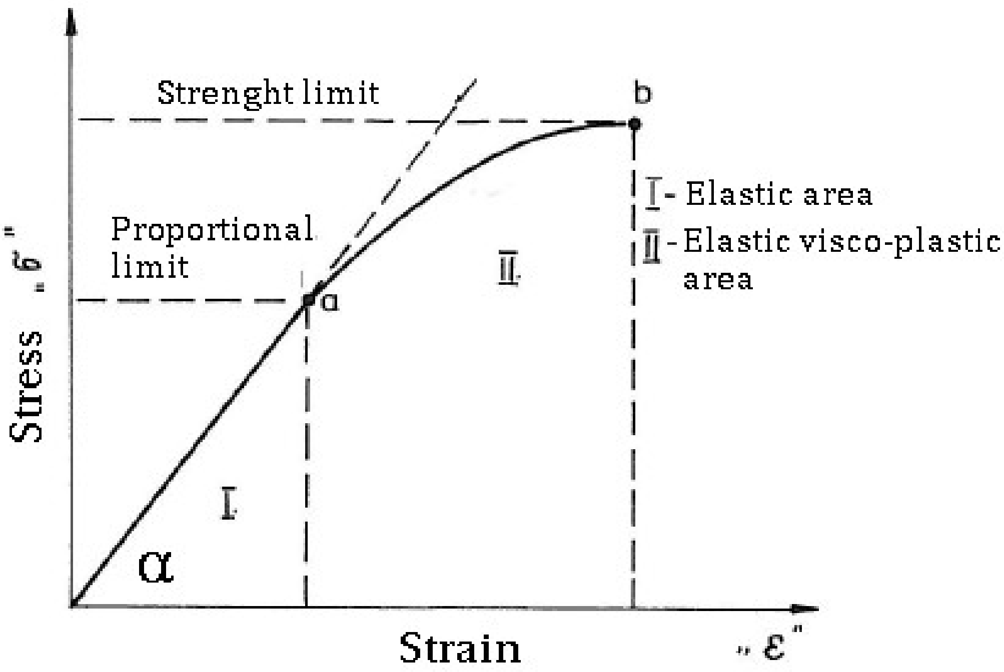
$$E = tg\,\alpha = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon}$$

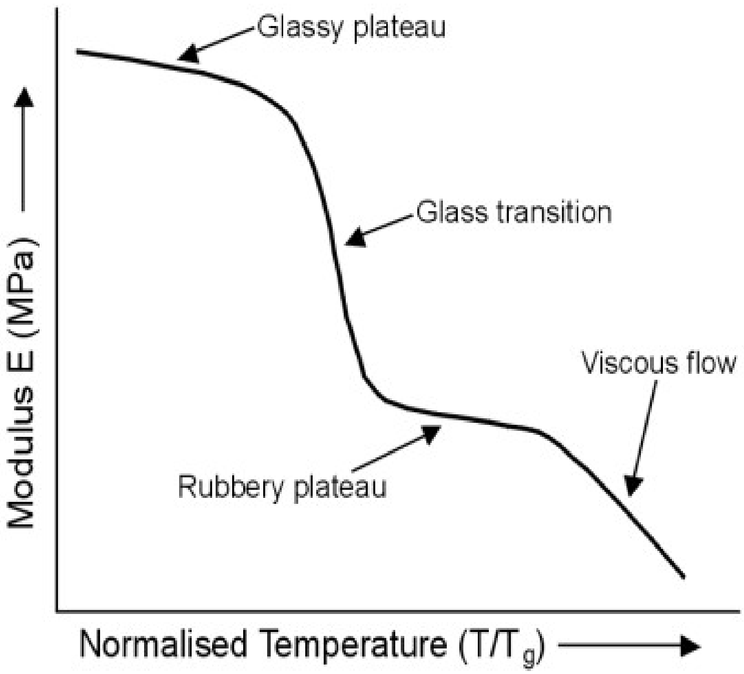
$$k = tg\,\alpha = \frac{\Delta F}{\Delta u}$$



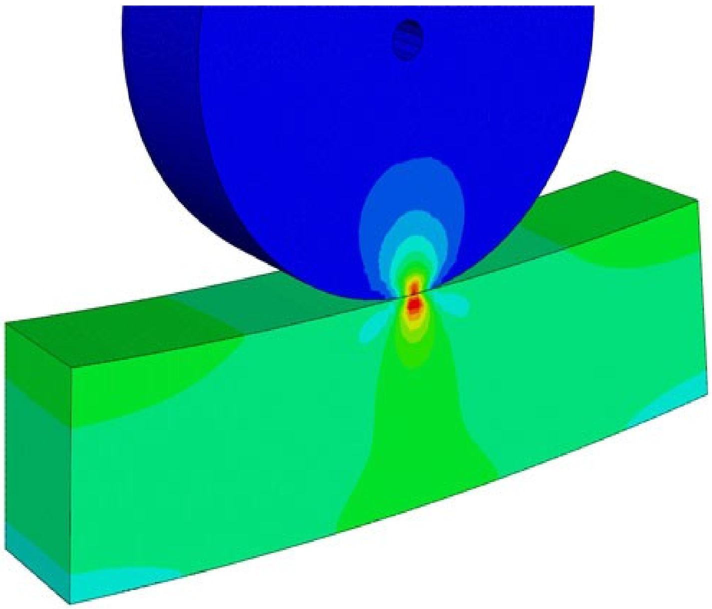


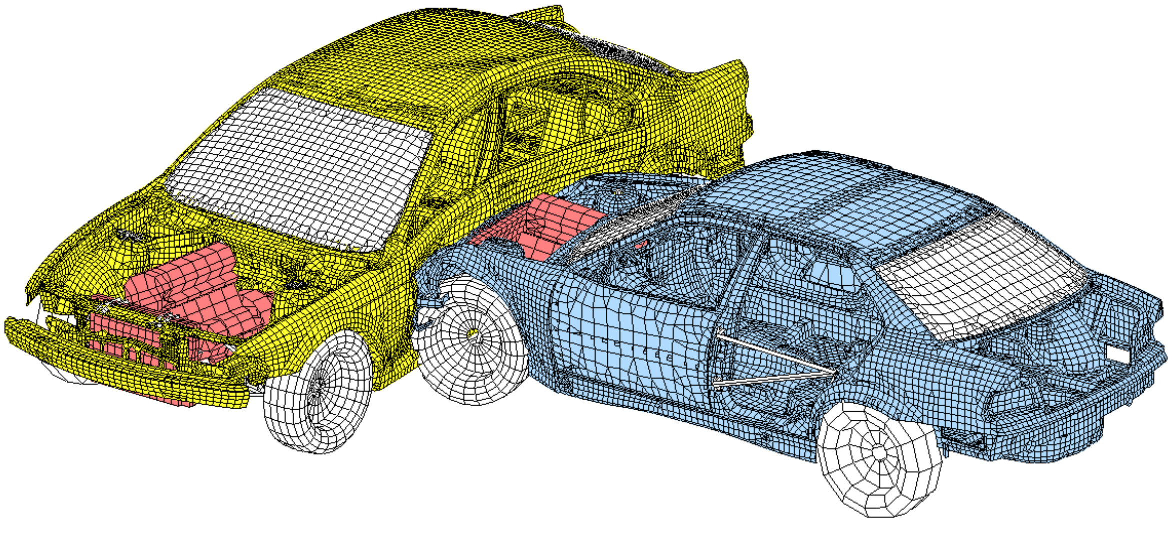
- **Materiálová nelinearita** je vyjádřena nelineárním vztahem mezi napětím a poměrnou deformací
  - Plastická oblast (trvalá deformace)
  - Změnou teploty se mění materiálové vlastnosti (plasty)
  - Vlivem zatížení se mění tuhost materiálu (dlouhodobé zatížení Creep)





- Mnoho struktur vykazuje různé chování při svém různém “**statusu**”, např. Tažné lano je buď **napnuté** nebo **uvolněné** (např. v klubíčku), dvě tělesa **jsou** nebo **nejsou** v kontaktu, puda je bud **zmrzlá** nebo **rozmrzlá** apod.
- Kontakt je častá, speciální a velmi složitá nelinearita
- Při kontaktu dochází ke vzájemným interakcím vedoucím ke změnám tuhosti obou těles a k jejich penetraci → v každém kroku řešení je nutné elementy, které jsou v kontaktu, upravit z hlediska jejich tuhosti



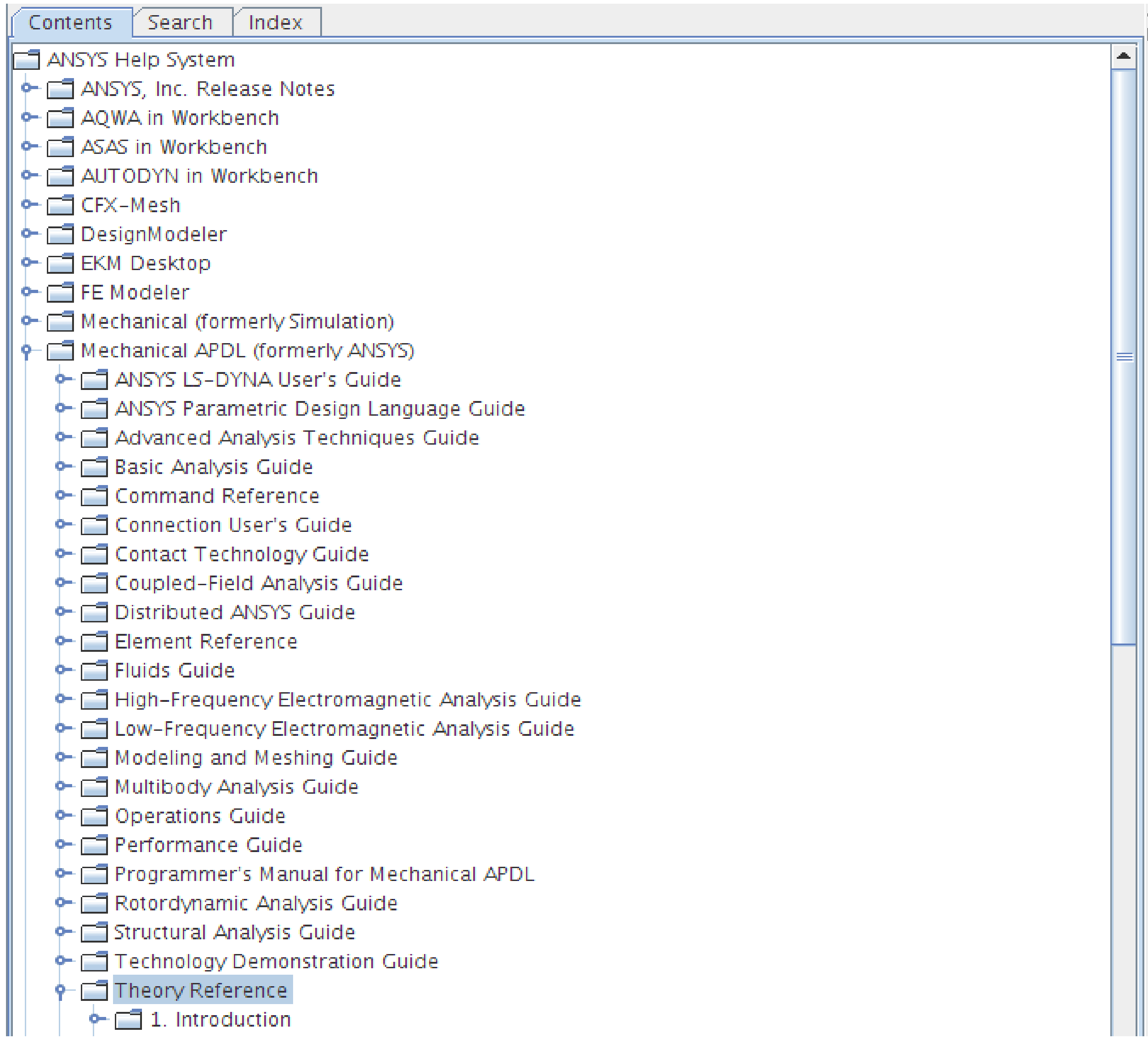


Fyzikální model – kombinace nelinearit

- V analýzách je častá i kombinace všech druhů nelinearit, např. pryžová manžeta v automobilu
  - Velká deformace
  - Materiál je guma (hyperelasticita)
  - Vzájemný kontakt částí

1) Je obtížnější dosáhnout konvergence (nalezení řešení)
2) Dlouhý výpočet vs. přesnost
3) Obtížná verifikace (experiment nebo analytické řešení)

ANSYS 14.5 – HELP – Theory reference



2.1. Structural Fundamentals

The following topics concerning structural fundamentals are available:

- Stress-Strain Relationships
- Orthotropic Material Transformation for Axisymmetric Models
- Temperature-Dependent Coefficient of Thermal Expansion

2.1.1. Stress-Strain Relationships

This section discusses material relationships for linear materials. Nonlinear materials are discussed in *Structures with Material Nonlinearities*. The stress is related to the strains by:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon^{el}\} \qquad (2\text{-}1)$$

where:

$\{\sigma\}$ = stress vector = $\lfloor \sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \sigma_{xy} \ \sigma_{yz} \ \sigma_{xz} \rfloor^T$ (output as S)

[D] = elasticity or elastic stiffness matrix or stress-strain matrix (defined in Equation 2-14 through Equation 2-19) or inverse defined in Equation 2-4 or, for a few anisotropic elements, defined by full matrix definition (input with **TB**,ANEL.)

$\{\varepsilon^{el}\} = \{\varepsilon\} - \{\varepsilon^{th}\}$ = elastic strain vector (output as EPEL)

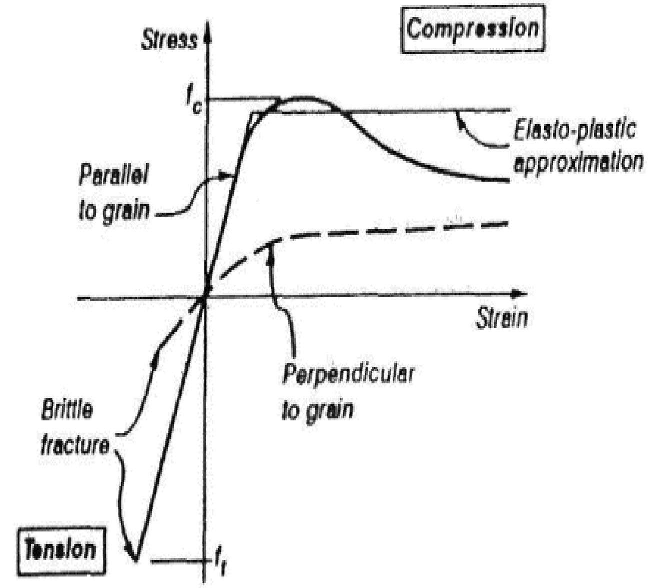
$\{\varepsilon\}$ = total strain vector = $\lfloor \varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \varepsilon_{xy} \ \varepsilon_{yz} \ \varepsilon_{xz} \rfloor^T$

$\{\varepsilon^{th}\}$ = thermal strain vector (defined in Equation 2-3) (output as EPTH)

Note: $\{\varepsilon^{el}\}$ (output as EPEL) are the strains that cause stresses.
The shear strains (ε_{xy}, ε_{yz}, and ε_{xz}) are the engineering shear strains, which are twice the tensor shear strains. The ε notation is commonly used for tensor shear strains, but is used here as engineering shear strains for simplicity of output.
A related quantity used in POST1 labeled "component total strain" (output as EPTO) is described in *Structures with Material Nonlinearities*.

Poměrnou deformaci $\{\varepsilon\}$ lze rozložit na složku deformace tepelné $\{\varepsilon_t\}$, počáteční $\{\varepsilon_0\}$ a pružné $\{\varepsilon_{el}\}$:

$$\{\varepsilon\}=\{\varepsilon_{el}\}+\{\varepsilon_t\}+\{\varepsilon_0\}$$

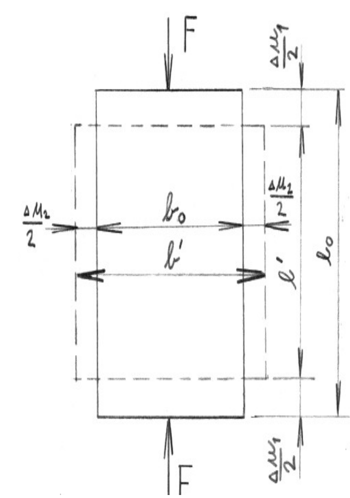


Vztah deformace a napětí pro lineární elasticitu materiálu zahrnující vnitřní (počáteční) napětí a napětí způsobená teplotní roztažností je dán vztahem:

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon_{el}\}+\{\sigma_0\}=[D](\{\varepsilon\}-\{\varepsilon_t\}-\{\varepsilon_0\})$$

Matice tuhosti [D], resp. inverzní matice poddajnosti $[D]^{-1}$ jsou definovány odlišně pro isotropní, ortotropní a anizotropní materiály. Pro isotropní materiály je matice $[D]^{-1}$ definována:

$$[D]^{-1}=\frac{1}{E}\begin{bmatrix}1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0\\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0\\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu)\end{bmatrix}$$



Fyzikální model – příklad napjatostně-deformační analýzy

Pro ortotropní materiály má již matice poddajnosti $[D]^{-1}$ tvar:

E je Youngův modul pružnosti
a μ je Poissonovo číslo.

$$[D]^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & \frac{-\mu_{xy}}{E_x} & \frac{\mu_{xz}}{E_x} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\mu_{yx}}{E_y} & \frac{1}{E_y} & \frac{-\mu_{yz}}{E_y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\mu_{zx}}{E_z} & \frac{-\mu_{zy}}{E_z} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} \end{bmatrix}$$

Teplotní deformace lze vyjádřit pomocí teploty, referenční teploty a koeficientu teplotní roztažnosti vztahem (analog. pro vlhkost):

$$\varepsilon_t=\alpha_T(T-T_{ref}) \qquad \varepsilon_w=\beta_H \Delta w$$

Vazbu pole teplotního (vlhkostního) a napjatostního lze s ohledem na *Hookův zákon*, deklarovaný rozklad poměrné deformace do složek a *druhý termodynamický zákon* pro vratné děje zapsat pomocí párových konstitutivních termoelastických rovnic:

$$\{\sigma\}=[D]\{\epsilon\}-[D]\{\alpha_T\}\Delta T$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}=T_0[D]\{\alpha_T\}\frac{\partial \epsilon}{\partial t}+\rho c\frac{\partial(\Delta T)}{\partial t}-[k]\nabla^2 T$$